INTERFACE TECNOLÓGICA

APLICATIVO PARA AUXILIAR A PRÁTICA DOCENTE NO ENSINO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR DE DUAS VARIÁVEIS: o uso de representações semióticas gráficas para apoio à aprendizagem do algoritmo determinístico para a resolução de problemas de programação linear de duas variáveis

SOFTWARE APPLICATION TO ASSIST TEACHER PRACTICE IN TEACHING TWO-VARIABLE LINEAR PROGRAMMING: the use of graphic semiotic representations to support the learning of the deterministic algorithm for solving two-variable linear programming problems

Caio Francisco Comelli - caiocomelli2015@gmail.com
Faculdade de Tecnologia de Taquaritinga (Fatec) – Taquaritinga – SP – Brasil

Paulo Francisco Sprovieri - paulo.sprovieri01@fatec.sp.gov.br
Faculdade de Tecnologia de Taquaritinga (Fatec) – Taquaritinga – SP – Brasil

DOI: 10.31510/infa.v19i2.1551
Data de submissão: 01/09/2022
Data do aceite: 28/11/2022
Data da publicação: 20/12/2022

RESUMO

O presente artigo pretende destacar a importância do papel das representações semióticas gráficas no ensino de um algoritmo determinístico, puramente lógico e algébrico, para a resolução de problemas de programação linear de duas variáveis. Para facilitação da prática docente, os autores construíram um software aplicativo que cria, a partir de um problema de programação linear, PPL, fornecido pelo usuário, uma tela contendo três representações semióticas gráficas que buscam oferecer a compreensão do algoritmo determinístico e, ao mesmo tempo, comparar com a resolução gráfica previamente estudada. Com isso, cria-se uma oportunidade para que os alunos possam desenvolver programas de computador para a resolução de problemas de programação linear de duas variáveis sem a necessidade de que conheçam bibliotecas gráficas oferecidas pelo ambiente de programação utilizado, o que permite o desenvolvimento de programas que implementem algoritmos de otimização mesmo por alunos com pouca experiência na prática de programação de computadores. Serão apresentadas algumas vantagens na utilização do aplicativo proposto por parte do professor responsável por apresentar tais conteúdos em disciplinas oferecidas em cursos na área de tecnologia de informação, cursos na área de produção e cursos na área de administração.

Palavras-chave: Programação linear. Algoritmo determinístico. Representações semióticas gráficas. Educação matemática.

ABSTRACT

This article aims to highlight the importance of the role of graphical semiotic representations in teaching a deterministic algorithm, purely logical and algebraic, for solving two-variable linear programming problems. To facilitate the teacher practice, the authors built an application software that creates, from a linear programming problem, LPP, provided by the user, a screen containing three graphical semiotic representations that seek to provide an understanding of the deterministic algorithm and, at the same time, compare with the graphic resolution previously studied. This creates an opportunity for students to develop computer programs for solving two-variable linear programming problems without the need for them to know the graphic libraries offered by the programming environment used, which allows the development of programs that implement optimization algorithms even by students with little experience in computer programming practice. Some advantages will be presented in the use of the proposed application by the teacher responsible for presenting such contents in subjects offered in courses in information technology, courses in production and courses in administration.

Keywords: Linear programming. Deterministic algorithm. Graphical semiotic representations. Math education.

1. INTRODUÇÃO

O papel do professor é o de transitar nos caminhos envolvendo o conhecimento noético e as diferentes formas de representação semiótica associadas, tendo sempre em mente a facilitação do aprendizado por parte do aluno. Para COSTA & RAUEN, 2009, "um conceito matemático fundamental como o de fração, por exemplo, é definido como conceito noético, sendo que as diferentes formas de representá-lo são definidas como representações semióticas" (apud SPROVIERI & COMELLI, 2021, p. 292). Sendo assim, metade é o conceito noético em que tomando-se o todo, dividindo-o em duas partes iguais, cada uma denominada metade, que pode ser representada de inúmeras formas, cada uma delas constituindo uma representação semiótica como ½, 50%, 0,5, entre outras.

As representações semióticas podem assumir inúmeras e diferentes formas: textuais, algébricas, tabulares, gráficas, entre outras.

No presente artigo, pretende-se apresentar um software aplicativo que aborda dois diferentes algoritmos para resolução de problemas de programação linear de duas variáveis que permitem que o professor possa, através de diferentes representações semióticas gráficas apresentadas pelo programa, realizar argumentações, comparações e demonstrações durante aulas de administração de produção, programação linear ou pesquisa operacional. Os dois algoritmos são: (1) algoritmo determinístico para a resolução de PPLs de duas variáveis (SPROVIERI & COMELLI, 2021) e (2) algoritmo gráfico e algébrico. Ambos os algoritmos serão apresentados a seguir através de um PPL de maximização extraído do livro Pesquisa Operacional na tomada de decisões (LACHTERMACHER, 2009, 4ª ed. p. 25).

1.1. ALGORITMO DETERMINÍSTICO PARA A RESOLUÇÃO DE PPL DE DUAS VARIÁVEIS

Considerando-se o PPL:

$Max\ Z = 4x + 3y$

$s.r.$

$x + 3y \leq 7$

$2x + 2y \leq 8$

$x + y \leq 3$

$y \leq 2$

$x, y \geq 0$

A Tabela 1 abaixo resume os processos algébrico e lógico do algoritmo determinístico para resolução de problemas de programação linear de duas variáveis. Algebricamente, a coluna Sistema fornece o conjunto de todos os sistemas de equações lineares obtidos a partir de cada uma das retas associadas às restrições fornecidas pelo PPL acima. A coluna Solução representa o resultado do sistema da coluna Solução e define o endereço do ponto de interseção entre as duas retas que formam aquele sistema. Logicamente, a Coluna Viável? é formada testando-se cada par de valores na coluna Solução em relação a todas as restrições do problema: se a resposta for Sim, significa que o ponto está contido no espaço-solução do problema.

Tabela 1. Conjunto de todos os sistemas de equações lineares a partir das restrições impostas ao PPL.

#	Sistema	Solução	Viável?	Valor de Z
1	$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$	(2.5,1.5)	Não	–
2	$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases}$	$(1,2)$	Sim	10

#	Sistema	Solução	Viável?	Valor de Z
3	$\begin{cases} x+3y=7 \\ y=2 \end{cases}$	(1,2)	Sim	10
4	$\begin{cases} x+3y=7 \\ x=0 \end{cases}$	$\left(0,\frac{7}{3}\right)$	Não	–
5	$\begin{cases} x+3y=7 \\ y=0 \end{cases}$	(7,0)	Não	–
6	$\begin{cases} 2x+2y=8 \\ x+y=3 \end{cases}$	Não tem	–	–
7	$\begin{cases} 2x+2y=8 \\ y=2 \end{cases}$	(2,2)	Não	–
8	$\begin{cases} 2x+2y=8 \\ x=0 \end{cases}$	(0,4)	Não	–
9	$\begin{cases} 2x+2y=8 \\ y=0 \end{cases}$	(4,0)	Não	–
10	$\begin{cases} x+y=3 \\ y=2 \end{cases}$	(1,2)	Sim	10
11	$\begin{cases} x+y=3 \\ x=0 \end{cases}$	(0,3)	Não	–
12	$\begin{cases} x+y=3 \\ y=0 \end{cases}$	(3,0)	Sim	12
13	$\begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases}$	(0,2)	Sim	6
14	$\begin{cases} y=2 \\ y=0 \end{cases}$	Não tem	–	–
15	$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$	(0,0)	Sim	0

Fonte: elaborada pelos autores

Percebe-se pela tabela que dois sistemas de equações lineares não têm solução (6 e 14). Os sistemas 1, 4, 5, 7, 8, 9 e 11 têm solução, porém não são viáveis porque não atendem a todas as restrições (parte lógica do algoritmo). Finalmente, os sistemas de equações lineares 2, 3, 10, 12, 13 e 15 têm solução, sendo que o sistema 12 corresponde a $x = 3 \; e \; y = 0$ para o valor de $Z_{máximo} = 12$.

1.2. ALGORITMO GRÁFICO E ALGÉBRICO PARA A RESOLUÇÃO DE PPL DE DUAS VARIÁVEIS

Quando se desenvolve o gráfico, como apresentado na Figura 1, observa-se que o ponto ótimo é o último ponto a ser ultrapassado por sucessivas curvas de nível (L_1, L_2 e L_3)

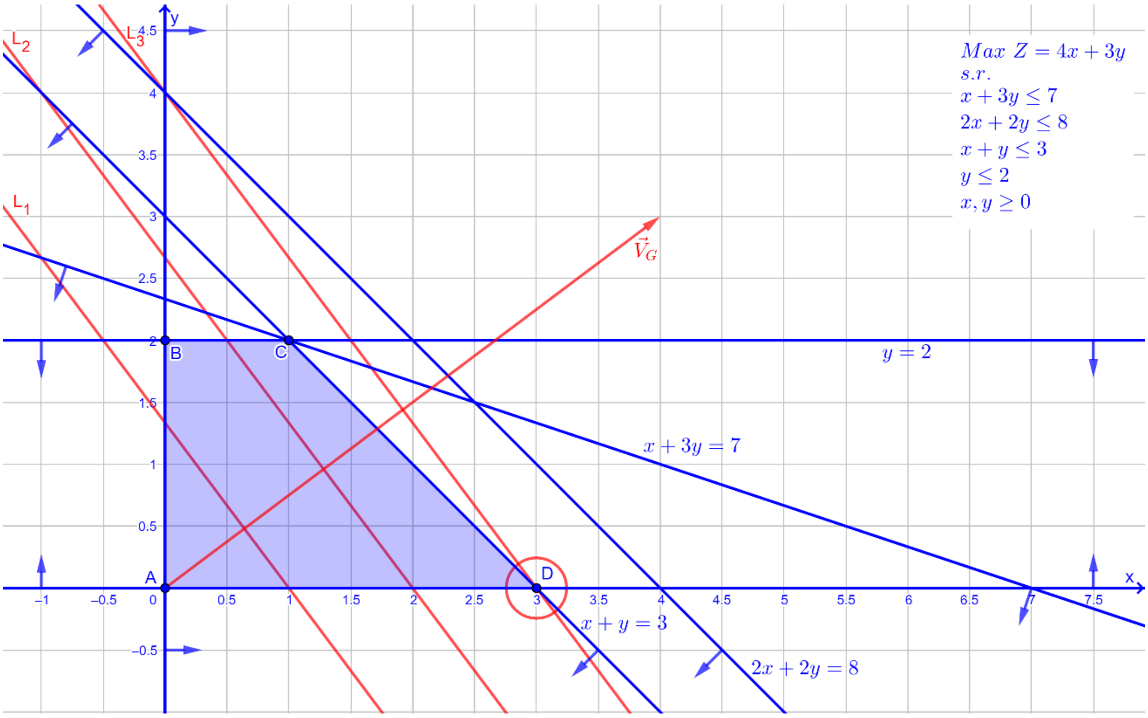

Figura 1. Resolução gráfica de um PPL. Elaborado pelos autores através do Geogebra Classic 6. (Fonte: autores).

deslocando-se perpendicularmente ao vetor gradiente ($\overrightarrow{V_G}$), no sentido 0 a ∞. Portanto, o ponto ótimo é o ponto D.

A seguir, a resolução algébrica associada ao gráfico da Figura 1.

O ponto D é dado por:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ \quad y = 0 \end{cases}$$

Considerando-se $\binom{x}{y} = A^{-1} \times \binom{k_1}{k_2}$ $STEINBRUSH\ \&\ WINTERLE, 1987,$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{detA)} \times adj(A)$, e $adj(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, temos:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, a matriz dos coeficientes das variáveis do sistema de equações lineares que definem o ponto D,

$det(A) = ad - cb = 1 \times 1 - 0 \times 1 = 1,$

$adj(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$

$A^{-1} = \frac{1}{1} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$

$\binom{k_1}{k_2} = \binom{3}{0}.$

Sendo assim, $\binom{x}{y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \binom{3}{0} = \begin{bmatrix} (1 \times 3) + (-1 \times 0) \\ (0 \times 3) + (1 \times 0) \end{bmatrix}$, e

$\therefore \binom{x}{y} = \binom{3}{0}$, isto é, o ponto D é $(3{,}0)$.

Como Z é máximo no ponto ótimo (D), temos que:

$Z = 4x + 3y$

$Z_{máx} = 4(3) + 3(0)$

$Z_{máx} = 12$

1.3. UM SOFTWARE APLICATIVO PARA APOIAR A PRÁTICA DOCENTE NO ENSINO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR DE DUAS VARIÁVEIS

Foi desenvolvido um aplicativo em Python para auxiliar professores responsáveis por ministrar conteúdos envolvidos com algoritmos de otimização, notadamente aqueles relacionados aos itens 1.1 e 1.2, anteriormente apresentados. O algoritmo determinístico é base para a construção do programa e representa a concretização de ideias apresentadas anteriormente pelos autores (SPROVIERI & COMELLI, 2021). Basicamente, o aplicativo oferece não somente a resolução de problemas de programação linear de duas variáveis, de maximização ou de minimização, mas também cria diferentes representações semióticas gráficas, oferecidas ao docente para permitir que se possa comparar a resolução gráfica com aquela resolução algébrica oferecida pelo algoritmo determinístico.

2. TECNOLOGIAS E FERRAMENTAS EMPREGADAS NA CONSTRUÇÃO DO APLICATIVO

Foi utilizada a IDE PyCharm Community Edition 2019.3.2 x 64. O interpretador de projetos é o Python 3.8. Essa linguagem foi escolhida pelo potencial que oferece para o desenvolvimento de soluções voltadas para a resolução de problemas matemáticos. Para realização de todas as funcionalidades que o aplicativo necessitava oferecer, foi necessária a instalação da biblioteca gráfica orientada a objetos Matplotlib (HUNTER, 2007). A intenção é também utilizar Python para que alunos possam construir suas próprias aplicações para os algoritmos estudados. O gráfico apresentado no item 1.2 foi construído através do Geogebra Classic 6, baseado no livro-texto empregado em cursos de pesquisa operacional e de programação linear, por apresentar resolução gráfica rigorosa e completa, destacando-se vetores de direcionamento, vetor gradiente e curvas de nível que constituem elementos importantes no apoio à tomada de decisões sobre a região viável apresentada (LACHTERMACHER, 2009).

3. RESULTADOS OBTIDOS

O programa oferece basicamente a imagem apresentada na Figura 2 que mostra 3 gráficos distintos.

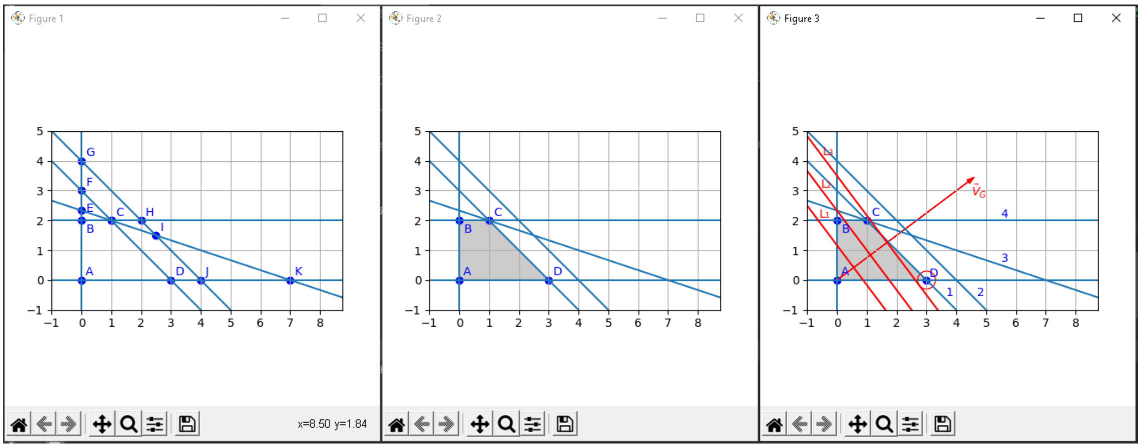

Figura 2. Gráfico que apresenta três representações semióticas gráficas que permitem que o docente possa estabelecer as relações entre o algoritmo determinístico e o algoritmo gráfico e algébrico, na resolução de PPLs de duas variáveis. (Fonte: autores).

O gráfico à esquerda exibe o conjunto de todos os pontos viáveis e não-viáveis exibido anteriormente na forma de tabela, quando da explanação do algoritmo determinístico (item 1.1). O gráfico do meio é obtido quando se suprime todos os pontos não-viáveis, destacando-se a região viável do PPL. Finalmente, o gráfico à direita representa a resolução gráfica completa que exibe o vetor-gradiente, as curvas de nível (L_1, L_2 e L_3). O círculo envolve o ponto ótimo D. Os números 1, 2, 3 e 4 são referências às retas $x + y = 3$, $2x + 2y = 8$, $x + 3y = 7$ e $y = 2$, respectivamente.

A seguir será apresentada a Tabela 2, gerada a partir da Tabela 1, porém contendo informações adicionais que possibilitam a comparação com o gráfico do lado esquerdo da imagem exibida pela Figura 2.

Tabela 2. A tabela em questão é uma representação semiótica tabular em relação ao gráfico à esquerda, apresentado pelo programa.

#	Sistema	Solução	Viável?	Valor de Z	Ponto
1	$\begin{cases} x+3y=7 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$	(2.5,1.5)	Não	_	I
2	$\begin{cases} x+3y=7 \\ x+y=3 \end{cases}$	(1,2)	Sim	10	C
3	$\begin{cases} x+3y=7 \\ y=2 \end{cases}$	(1,2)	Sim	10	C
4	$\begin{cases} x+3y=7 \\ x=0 \end{cases}$	$\left(0,\frac{7}{3}\right)$	Não	_	E
5	$\begin{cases} x+3y=7 \\ y=0 \end{cases}$	(7,0)	Não	_	K
6	$\begin{cases} 2x+2y=8 \\ x+y=3 \end{cases}$	Não tem	_	_	_
7	$\begin{cases} 2x+2y=8 \\ y=2 \end{cases}$	(2,2)	Não	_	H
8	$\begin{cases} 2x+2y=8 \\ x=0 \end{cases}$	(0,4)	Não	_	G
9	$\begin{cases} 2x+2y=8 \\ y=0 \end{cases}$	(4,0)	Não	_	J
10	$\begin{cases} x+y=3 \\ y=2 \end{cases}$	(1,2)	Sim	10	C
11	$\begin{cases} x+y=3 \\ x=0 \end{cases}$	(0,3)	Não	_	F
12	$\begin{cases} x+y=3 \\ y=0 \end{cases}$	(3,0)	Sim	12	D
13	$\begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases}$	(0,2)	Sim	6	B
14	$\begin{cases} y=2 \\ y=0 \end{cases}$	Não tem	_	_	_
15	$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$	(0,0)	Sim	0	A

Fonte: elaborada pelos autores

A Figura 3 apresenta o gráfico à esquerda maximizado. Pode-se observar que o gráfico apresentado é uma representação semiótica gráfica análoga à representação semiótica tabular expressa pela tabela acima. Ambas as representações semióticas estão associadas ao algoritmo determinístico. Pode-se observar que o ponto C é a interseção formada por 3 retas e, por isso, pode ser obtido através da resolução de 3 sistemas de equações lineares, representados pelos números #2, #3 e #10 na Tabela 2. Os sistemas #6 e #14 não têm solução uma vez que as retas que formam o sistema #6, $2x + 2y = 8$ e $x + y = 3$ são paralelas. O mesmo ocorre com as retas que fazem parte do sistema #14, $y = 2$ e $y = 0$. Isso explica por que existem 15 sistemas de equações lineares e apenas 11 pontos, de A a K, no gráfico abaixo.

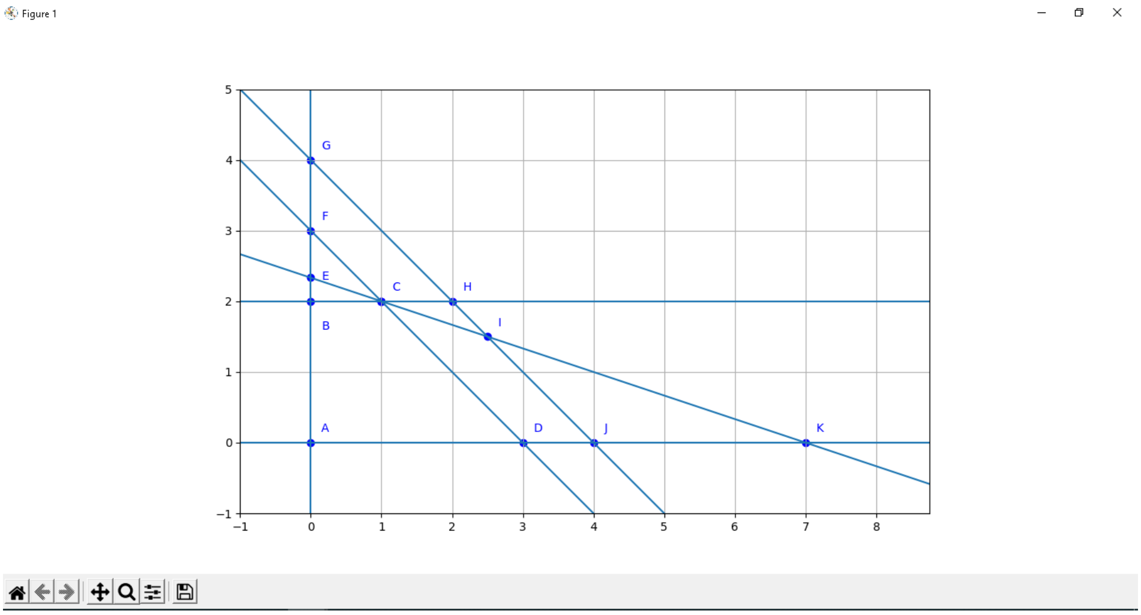

Figura 3. Representação semiótica gráfica associada ao algoritmo determinístico para resolução de PPL de duas variáveis. (Fonte: autores).

O gráfico do meio na Figura 2 pode ser visualizado no modo maximizado na Figura 4 adiante. Ele é obtido após submeter-se o gráfico à esquerda ao trecho lógico do algoritmo determinístico para resolução de PPL de duas variáveis. A título de exemplo, considere-se o sistema #1, cuja solução é $(2.5,1.5)$ que definem o endereço do ponto I. Para determinar se o ponto I é viável ou não ele deve atender a todas as restrições do PPL. Desse modo:

Para $x + 3y \leq 7$:

$2.5 + 3(1.5)$

$2.5 + 4.5$

$7 \leq 7(V)$

Para $2x + 2y \leq 8$:

$2(2.5) + 2(1.5)$

$5 + 3$

$8 \leq 7(V)$

Para $x + y \leq 3$:

$2.5 + 1.5$

$4 \leq 3(F)$

Como o ponto I não resulta verdadeiro para a terceira restrição, ele não é viável, não sendo necessário verificar se o ponto I atende as demais restrições impostas ao PPL exemplo. Sendo assim, os pontos viáveis são os pontos A, B, C e D que constituem os pontos extremos da região viável representada abaixo:

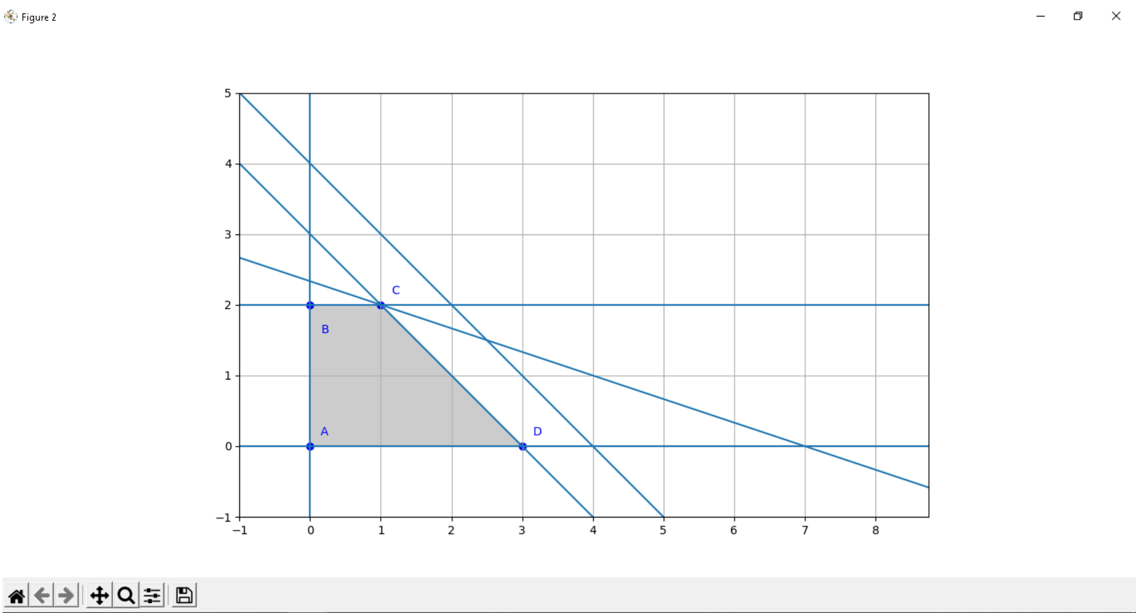

Figura 4. Representação semiótica gráfica associada à fase lógica do algoritmo determinístico para resolução de PPL de duas variáveis. (Fonte: autores).

O gráfico apresentado pela Figura 4 é, claramente, o meio do caminho entre o primeiro e o último gráficos, sendo que o gráfico à direita representa a resolução gráfica completa. O professor pode, a partir da tela que apresenta simultaneamente os três gráficos, maximizar o gráfico desejado e utilizar as opções de zoom oferecidas pela barra de ferramentas inferior, oferecida pelo próprio Matplotlib.

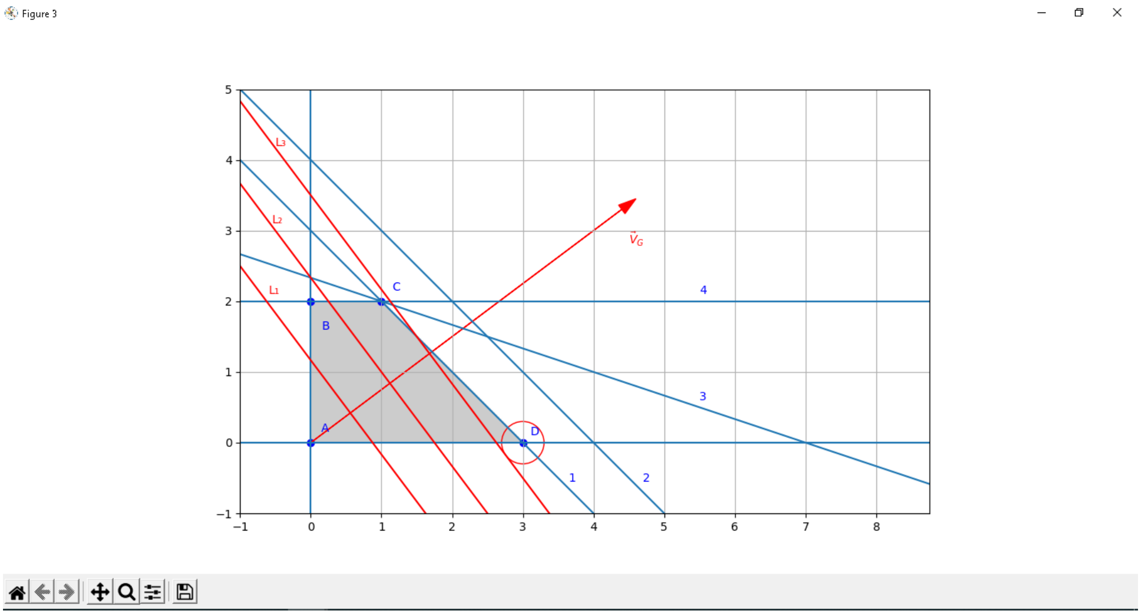

Figura 5. Representação semiótica gráfica representando a resolução gráfica completa para o PPL de duas variáveis apresentado. (Fonte: autores).

Todos os sistemas de equações lineares são resolvidos por álgebra linear, ou método matricial, pelo software aplicativo, conforme apresentado anteriormente. Essa estratégia é importante, caso o docente queira estimular alunos iniciantes de cursos de tecnologia a implementarem a solução do algoritmo determinístico.

4. CONCLUSÃO

Atualmente, o professor não é mais apenas o que transmite conteúdo. Ele é também o profissional que adapta o conteúdo de acordo com seus alunos. É o arquiteto das diferentes formas de exibir o conteúdo, isto é, aquele que cria diferentes formas de representações semióticas. E, nas palavras de DUVAL (2012), “as representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento” (DUVAL, 2012, p. 269).

Aqui foram apresentadas diferentes formas de representações semióticas, tabular e gráficas, no intuito de permitir a apresentação de dois métodos para a resolução de problemas de programação linear: o primeiro, aqui chamado algoritmo determinístico para resolução de problemas de programação linear de duas variáveis, e um segundo, mais presente nas salas de aula, aqui tratado como método para resoluções gráfica e algébrica para problemas de programação linear de duas variáveis. O software aplicativo criado tem como objetivo principal facilitar o professor, fornecendo diferentes representações semióticas gráficas que permitam ao profissional não apenas explicar os algoritmos envolvidos, mas também esclarecer todas as correlações e diferenças entre eles.

Tradicionalmente, o método gráfico e algébrico é mais frequentemente usado. Considerando cursos de programação linear ou pesquisa operacional oferecidos para alunos que fazem diferentes cursos na área de tecnologia da informação, fica difícil para eles programarem a resolução gráfica com pouca experiência na prática de programação de computadores. Surge então a oportunidade ideal para o algoritmo determinístico, pois ele é bem mais fácil de implementar, sendo estritamente algébrico e lógico e sem heurísticas complexas que tornam o método gráfico e algébrico inadequado para alunos pouco experientes.

Faz-se necessário, também, chamar a atenção para o tempo que se poupa com a utilização das representações semióticas aqui empregadas, aliadas aos métodos tradicionais de aula e com a utilização de aplicativos de gráficos de funções, como o Geogebra aqui citado. Por exemplo, com um único comando, fornecido ao Geogebra Classic 6, representado pela expressão booleana unindo todas as restrições e condições de não-negatividade através de operadores lógicos $\wedge$ (E n-ário) chega-se ao gráfico da Figura 4.

REFERÊNCIAS

COSTA, J. F. A.; RAUEN, F. J. *Conversão de representações semióticas em matemática: linguagem e ensino em questão*. XIX Seminário do CELLIP. Pesquisa em Língua e Cultura na América Latina. UNIOESTE – Cascavel, Paraná. 21 a 23 de outubro de 2009.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. (tradução Moretti, M. T.). **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

GEOGEBRA. **Geogebra – Aplicativos Matemáticos**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em 05 set. 2022.

HUNTER, J. D. Matplotlib: a 2D graphics environment. **Computing in Science & Engineering**. v. 9, n. 3, p. 90-95, 2007.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões**. São Paulo: Prentice Hall Brasil, 2009.

SPROVIERI, P. F.; COMELLI, C.F. Algoritmo determinístico: uma base para a implementação de aplicativos educacionais que auxiliem o processo ensino-aprendizagem na resolução de problemas de programação linear de duas variáveis. **Revista Interface Tecnológica**, Taquaritinga, v. 18, n. 2, p.290-303, 2021.

STEINBRUSH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.