

ALGORITMO DETERMINÍSTICO: uma base para a implementação de aplicativos educacionais que auxiliem o processo ensino-aprendizagem na resolução de problemas de programação linear de duas variáveis

DETERMINISTIC ALGORITHM: a basis for the implementation of educational applications that assist the teaching-learning process in solving two-variable linear programming problems

Paulo Francisco Sprovieri – paulo.sprovieri01@fatec.sp.gov.br
Faculdade de Tecnologia de Taquaritinga – Taquaritinga – São Paulo – Brasil

Caio Francisco Comelli - caiocomelli2015@gmail.com
Faculdade de Tecnologia de Taquaritinga – Taquaritinga – São Paulo – Brasil

DOI: 10.31510/inf.v18i2.1303

Data de submissão: 15/09/2021

Data do aceite: 03/11/2021

Data da publicação: 30/12/2021

RESUMO

Este artigo pretende apresentar um algoritmo determinístico para a resolução de problemas de programação linear de duas variáveis, como forma de oferecer uma estratégia de solução mais simples, quando houver a necessidade de se desenvolver programas de computador que implementem a resolução de tais problemas. Problemas de programação linear de duas variáveis são tradicionalmente resolvidos através de algoritmos envolvendo duas formas de resolução, distintas e combinadas: a resolução gráfica e a resolução algébrica. No entanto, considerando-se cursos de programação linear oferecidos a alunos inexperientes em programação de computadores, a resolução gráfica exigiria um domínio de bibliotecas de linguagem e um nível de conhecimento prático de programação fora do escopo de tais cursos. Sendo assim, o algoritmo aqui proposto representa uma alternativa interessante para disciplinas como programação linear, ou pesquisa operacional, oferecidas em cursos de ensino tecnológico, engenharia de produção, além de cursos na área de computação que possuam disciplinas introdutórias envolvendo o estudo de programação linear.

Palavras-Chave: Algoritmo determinístico. Programação linear. Educação matemática.

ABSTRACT

This article aims to present a deterministic algorithm for solving linear programming problems in two variables to offer a simpler solution strategy, when there is a need to develop computer

programs which implement the resolution of such problems. Linear programming problems in two variables are traditionally solved by algorithms involving two forms of resolution, separated, and combined: the graphic resolution and algebraic resolution. However, considering the linear programming courses offered to students inexperienced in computer programming, the graphic resolution would require a mastery of language libraries and a level of knowledge of programming outside the scope of such courses. Thus, the algorithm proposed here is an interesting alternative to disciplines such as linear programming and operations research courses offered in educational technology, manufacturing engineering, as well as courses in computing that have introductory courses involving the study of linear programming.

Keywords: Deterministic algorithm. Linear programming. Math education.

1. INTRODUÇÃO

Muitos professores já se depararam com o problema de ministrar uma disciplina de matemática aplicada como cálculo numérico, por exemplo, em que se espera que os alunos implementem os algoritmos estudados em uma linguagem de programação de computadores. Em se tratando de disciplinas introdutórias, soma-se à dificuldade intrínseca ao conteúdo da disciplina a inexperiência com a atividade de programação em si. Ao mesmo tempo, muitos professores relutam abdicar ou sacrificar parte das tarefas de programação em virtude do ganho que a atividade prática de programação pode proporcionar em relação ao próprio conteúdo específico abordado pela disciplina.

Uma das formas de se minimizar dificuldades no processo de aprendizagem de disciplinas, que apresentem as características apontadas acima, encontra-se no processo de busca por algoritmos alternativos que, muito embora não representem as melhores estratégias para a solução dos problemas estudados, representam alternativas que propiciam implementações mais simples e que conduzem aos mesmos resultados, porém mais rapidamente. Dessa forma, o foco é mantido essencialmente sobre o conteúdo matemático exigido.

Este artigo apresenta um algoritmo alternativo para a resolução de problemas de programação linear de duas variáveis, cuja implementação em linguagens de programação demonstra-se mais simples do que seria a programação desenvolvida a partir do algoritmo mais usualmente utilizado. Esse algoritmo, o mais usual, como será visto a seguir, apresenta duas formas distintas de resolução, gráfica e algébrica, sendo amplamente abordadas pela literatura

em pesquisa operacional (LACHTERMACHER, 2009). Dessa forma, serão apresentados aqui os dois algoritmos, primeiramente o mais tradicional e, na sequência, o algoritmo determinístico proposto, sendo que para ambos os casos será utilizado o mesmo problema de programação linear de duas variáveis como exemplo.

O papel do professor é estabelecido fundamentalmente na fronteira entre o saber científico e o saber a ser ensinado (CHEVALLARD, 1991). O processo de transformação de saberes, denominado transposição didática, estabelece de forma decisiva a competência no exercício da docência. Um conceito matemático fundamental como o de fração, por exemplo, é definido como conceito noético, sendo que as diferentes formas de representá-lo são definidas como representações semióticas (COSTA; RAUEN, 2009). Por exemplo, o conceito noético como a metade de alguma coisa pode ser representado através de múltiplas conversões semióticas como “50%”, “meio”, “ $\frac{1}{2}$ ”, entre outras. Pretende-se demonstrar aqui que as representações gráficas também estabelecem diferentes formas de representações semióticas concorrendo, em conjunto, para o mesmo objetivo essencial, facilitar a compreensão do aluno sobre um conceito fundamental que lhe é apresentado.

2. EXEMPLO DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR DE DUAS VARIÁVEIS

Para ilustração de ambos os algoritmos aqui tratados, optou-se por um problema de programação linear, PPL, de duas variáveis, extraído do livro-texto adotado e que contivesse pontos de interseção em vários quadrantes do plano cartesiano (LACHTERMACHER, 2009; p. 25, exercício 2):

$$\begin{array}{l} \text{Min } Z = x + 2y \\ \text{sujeito a:} \\ x + y \geq 1 \\ -5x + 2y \geq -10 \\ 3x + 5y \geq 15 \\ x, y \geq 0 \end{array}$$

Figura 1. Problema-exemplo adotado (LACHTERMACHER, 2009).

2.1. RESOLUÇÃO GRÁFICA PARA PPL'S DE DUAS VARIÁVEIS

Essa forma de resolução é estritamente qualitativa como se pode observar no gráfico expresso na Figura 2. Sendo assim, ela aponta o ponto ótimo do problema acima, porém sem determinar quanto seria o valor máximo de Z naquele ponto.

A resolução gráfica é obtida através de várias etapas, descritas a seguir:

- Traçar todas as retas associadas às restrições fornecidas no PPL: $x + y \geq 1$, $-5x + 2y \geq -10$ e $3x + 5y \geq 15$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$;
- Determinar a região viável do problema, através dos vetores de direcionamento implícitos a cada uma das desigualdades acima;
- Demarcar os pontos extremos, A e B, considerando-se a definição: ponto extremo ou ponto limítrofe é todo ponto de interseção, dentro da região viável, entre duas ou mais retas associadas às restrições envolvidas;
- Traçar o vetor gradiente, considerando que este é o segmento orientado coincidente à reta que passa pela origem (0,0) e pelo ponto representativo das derivadas parciais em x e em y , $(\frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y})$, da função-objetivo do problema, Z . Nesse caso, o ponto de coordenada (1,2);
- Traçar as curvas de nível, L_1 e L_2 , atribuindo-se valores arbitrários a Z .

A resposta da resolução gráfica é: “O ponto de mínimo da função-objetivo Z é o ponto B”.

Chega-se a isso através da definição de ponto mínimo:

Ponto mínimo é o último ponto a ser ultrapassado por sucessivas curvas de nível que atravessam a região viável a partir do máximo apontado pelo vetor gradiente, caminhando perpendicularmente e no sentido contrário ao apontado pelo vetor, até o limite extremo da região viável, que, quando existe, pode ser representado por um ponto extremo ou por um segmento de reta delimitado por dois pontos extremos.

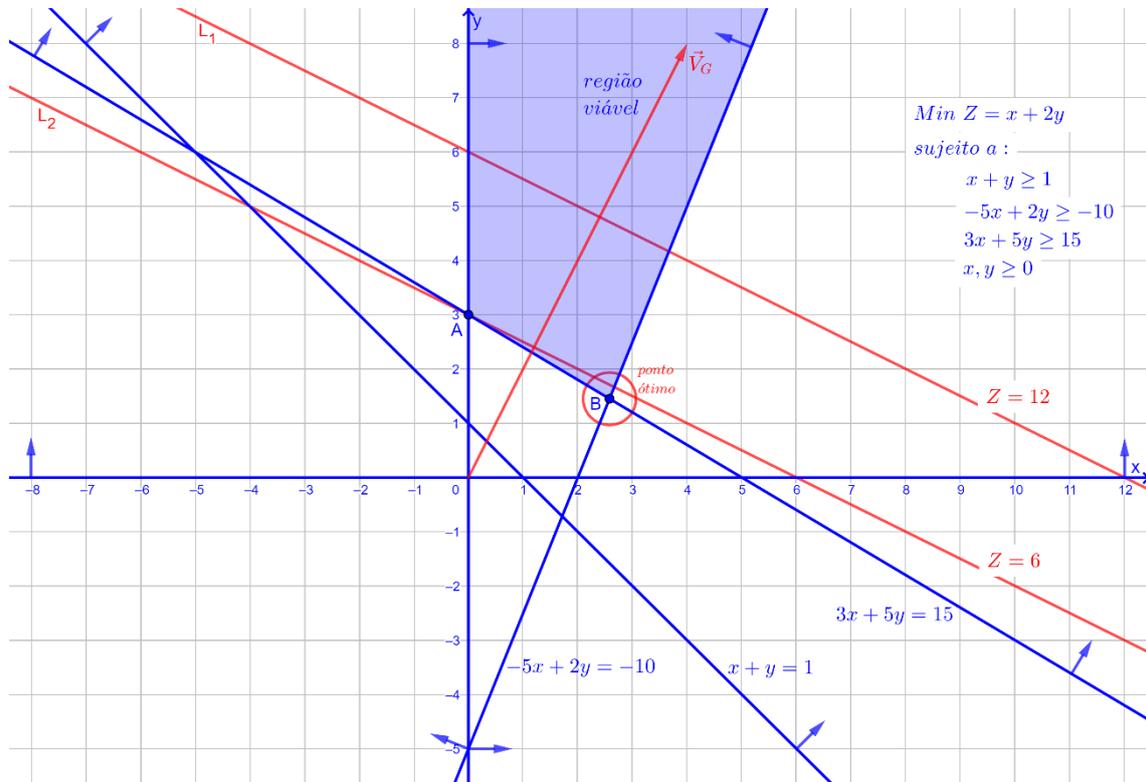


Figura 2. Gráfico para a resolução do PPL. Elaborado através do software Geogebra Classic 6, versão 6.0.662.0-offline (26 August 2021).

Fonte: próprios autores.

Portanto, a resolução do PPL não é dada somente pela resolução gráfica expressa pela Figura 2, mas também pela resolução algébrica. Com o ponto de mínimo encontrado o próximo passo é determinar quanto representa Z no ponto B . Sabendo-se que o ponto B é o ponto de interseção entre $-5x + 2y = -10$ e $3x + 5y = 15$, encontra-se aí a condição necessária para dar início ao processo de resolução algébrica a seguir.

2.2. RESOLUÇÃO ALGÉBRICA PARA PPL'S DE DUAS VARIÁVEIS

Uma vez obtido o ponto mínimo, a partir da resolução gráfica descrita na seção anterior, o próximo passo é determinar a coordenada do ponto B . Isso é feito através da resolução do sistema de equações lineares envolvendo as retas derivadas das restrições impostas pelo PPL e que definem o ponto B como ponto de interseção entre elas. Essas retas são $3x + 5y = 15$ e $-5x + 2y = -10$. Sendo assim, tem-se:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 15 & (1) \\ -5x + 2y = -10 & (2) \end{cases}$$

Multiplicando-se o valor de (1) por 5 e de (2) por 3, tem-se que:

$$\begin{cases} 15x + 25y = 75 \\ -15x + 6y = -30 \end{cases}$$

$$0x + 31y = 45$$

Portanto, $y = \frac{45}{31}$. Substituindo-se o valor de y em (1), tem-se que $x = \frac{80}{31}$. Sendo assim, o ponto

B possui coordenada $\left(\frac{80}{31}, \frac{45}{31}\right)$ ou (2,5806; 1,4516). Finalmente, para se obter o valor mínimo

de Z deve-se substituir a coordenada do ponto B na função-objetivo, como demonstrado abaixo:

$$Z_{\min} = x + 2y = \frac{80}{31} + 2 \times \frac{45}{31} \equiv \boxed{Z_{\min} = \frac{170}{31} \cong Z_{\min} = 5,4839}$$

Desse modo, obtém-se a resposta final: o valor de Z_{\min} é igual a 5,48, consumindo-se 2,58 unidades de x e 1,45 unidades de y , aproximadamente. A seguir, será apresentada uma forma de resolução de PPLs de duas variáveis que não exige a confecção de gráfico.

3. RESOLUÇÃO DETERMINÍSTICA PARA PPL'S DE DUAS VARIÁVEIS

A forma de resolução determinística apresentada a seguir foi desenvolvida a partir da seguinte indagação: é possível resolver um PPL de duas variáveis sem traçar gráfico algum e que não seja através do método simplex analítico ou do método simplex tabular? O texto a seguir demonstra que sim e, além disso, o algoritmo determinístico proposto torna fácil a implementação através de uma linguagem de programação de computadores, utilizando manipulações algébricas matriciais a partir de conhecimento básico em Álgebra Linear.

Para tornar mais fácil e clara, a apresentação da forma determinística de resolução de PPLs de duas variáveis, será utilizado o mesmo problema exemplo proposto no início artigo lembrando, porém, que o algoritmo não exige a elaboração de gráfico algum para obter a resposta: $Z \cong 5,48$, para:

$$x \cong 2,58 \text{ e } y \cong 1,45.$$

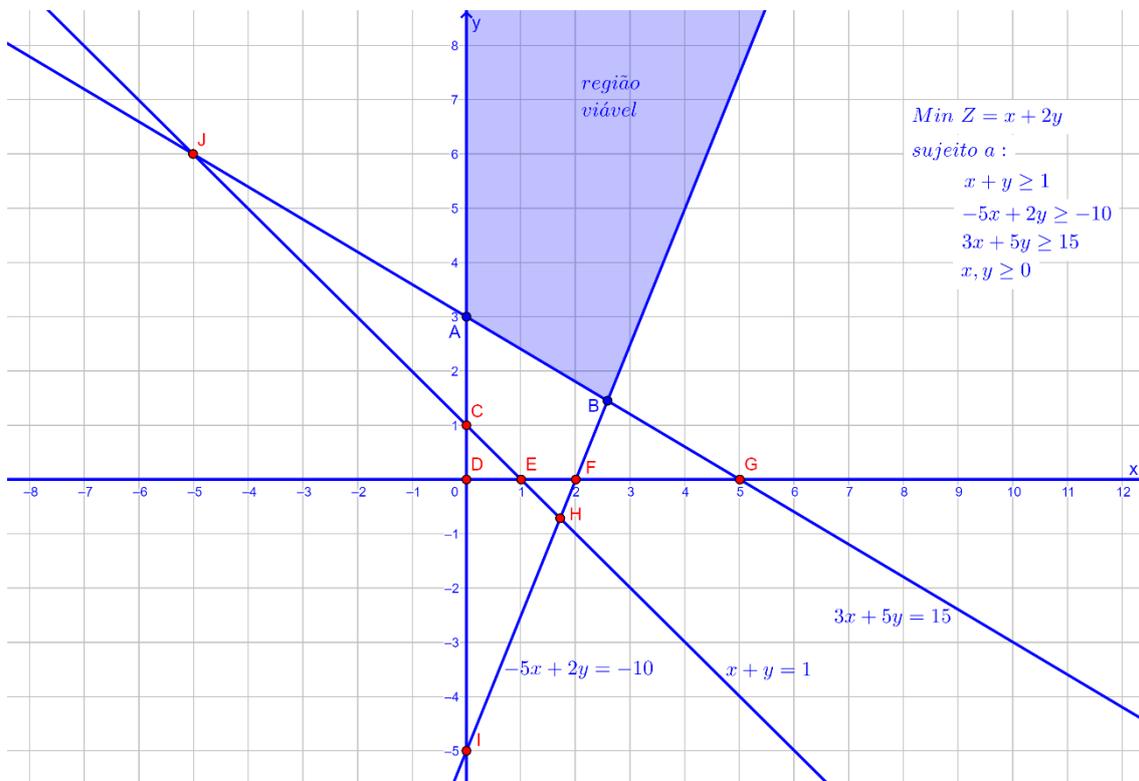


Figura 3. O gráfico ilustra o fato de que cada ponto, de A até J, representa pontos de interseção entre duas ou mais retas associadas às restrições impostas pelo PPL. Elaborado através do software Geogebra Classic 6, versão 6.0.662.0-offline (26 August 2021).

Fonte: próprios autores.

Na Figura 3, percebem-se as mesmas retas correspondentes às restrições do problema. Nota-se que foram eliminadas as retas correspondentes ao vetor gradiente e as curvas de nível L_1 e L_2 . A região viável foi mantida intacta, bem como os pontos extremos A e B. Uma diferença importante em relação ao gráfico da Figura 2 é que aparecem outros pontos, quais sejam: C, D, E, F, G, H, I e J. Na verdade, os pontos de A até J estão relacionados com o conjunto de todos os possíveis sistemas de equações lineares que podem ser obtidos através da combinação entre todas as equações lineares associadas às restrições do PPL exemplo, incluindo-se as condições de não negatividade, $x=0$ e $y=0$, como pode ser visto através da Tabela 1.

Ponto	Sistema Linear	Coordenada	Ponto extremo?
-------	----------------	------------	----------------

A	$\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ x = 0 \end{cases}$	(0,3)	Sim
B	$\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ -5x + 2y = -10 \end{cases}$	$\left(\frac{80}{31}, \frac{45}{31}\right)$	Sim
C	$\begin{cases} x + y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$	(0,1)	Não
D	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$	(0,0)	Não
E	$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$	(1,0)	Não
F	$\begin{cases} -5x + 2y = -10 \\ y = 0 \end{cases}$	(2,0)	Não
G	$\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ y = 0 \end{cases}$	(5,0)	Não
H	$\begin{cases} x + y = 1 \\ -5x + 2y = -10 \end{cases}$	$\left(\frac{12}{7}, -\frac{5}{7}\right)$	Não
I	$\begin{cases} -5x + 2y = -10 \\ y = 0 \end{cases}$	(0, -5)	Não
J	$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 5y = 15 \end{cases}$	(-5,6)	Não

Tabela 1. Combinação dos diferentes sistemas de equações lineares, derivados das restrições do PPL de duas variáveis analisado.

Note que todos os pontos demarcados pelo gráfico da Figura 3 podem ser obtidos realizando todas as possíveis combinações entre cada duas ou mais retas associadas às restrições, fornecidas pelo problema, e resolvendo os sistemas de equações lineares resultantes, conforme ilustra a Tabela 1.

Observe que a coluna à direita da Tabela 1 determina a característica de um ponto de interseção ser ou não um ponto extremo. Um ponto de interseção é um ponto extremo se atender a todas as restrições impostas ao problema.

Um último aspecto a ser discutido, antes da apresentação do algoritmo determinístico para a resolução de PPLs de duas variáveis, é a decisão sobre qual método para resolução de sistemas de equações lineares seria mais indicado para fazer parte do algoritmo proposto. Para a melhor escolha deve-se verificar que os sistemas de equações lineares apresentados são todos, devido à natureza do problema, sistemas homogêneos, com duas equações e duas incógnitas ou

variáveis. Além disso, o método deverá ser de fácil implementação em linguagens de programação de computadores, mesmo para alunos com pouca prática.

Sendo assim, buscou-se na Álgebra Linear o subsídio necessário (STEINBRUSH; WINTERLE, 1987). Considere que os sistemas de equações lineares listados na Tabela 1 podem ser representados através de matrizes, sendo uma a matriz dos coeficientes das variáveis e a outra a matriz dos termos independentes, como representado abaixo, considerando-se o sistema de equações lineares que constitui o ponto B:

Dado $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \end{bmatrix}$, onde A é a matriz dos coeficientes das variáveis das equações consideradas e B é o vetor-coluna dos termos independentes para as mesmas equações. A solução é dada por $X = A^{-1} \times B$, sendo X o vetor-coluna das variáveis correspondentes à coordenada do ponto a ser calculada.

Sabendo-se que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \text{adj}(A)$ e que dado $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, sua adjunta é $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ e $\det(A) = ad - bc$, a coordenada do ponto B pode ser calculada por:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ -5x + 2y = -10 \end{cases} \text{ é o sistema de equações lineares relativo ao ponto } B.$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}, \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \det(A) = (2 \times 3) - (-5 \times 5) = 31$$

$$A^{-1} = \frac{1}{31} \times \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{31} & -\frac{5}{31} \\ \frac{5}{31} & \frac{3}{31} \end{bmatrix}. \text{ Portanto, a solução do sistema é dada por:}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{31} & -\frac{5}{31} \\ \frac{5}{31} & \frac{3}{31} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{31} \times 15\right) + \left(-\frac{5}{31} \times -10\right) \\ \left(\frac{5}{31} \times 15\right) + \left(\frac{3}{31} \times -10\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{30}{31} + \frac{50}{31} \\ \frac{75}{31} - \frac{30}{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{80}{31} \\ \frac{45}{31} \end{bmatrix}, \quad \text{ou}$$

seja:

$$x \cong 2,58 \text{ e } y \cong 1,45, \text{ sendo } Z_{\min} = \frac{80}{31} + 2 \times \frac{45}{31} = \frac{80}{31} + \frac{90}{31} = \frac{170}{31}.$$

Portanto, $Z_{\min} \cong 5,48$.

Como esperado, o algoritmo envolvendo as resoluções gráfica e algébrica e o algoritmo determinístico conduzem a resultados idênticos. De acordo com os cálculos acima, a resolução determinística é estritamente algébrica. Isso permite um esforço de programação significativamente menor.

Para iniciar o algoritmo, propriamente dito, duas entradas são necessárias. A primeira delas refere-se ao processo de otimização em si, de maneira que o usuário do programa deverá indicar se o PPL é de maximização ou de minimização. A segunda, considerando-se que o algoritmo aceita problemas com apenas duas variáveis, refere-se ao número de restrições do problema. Fornecidas essas duas entradas, os dados podem ser armazenados em uma matriz, como indicado na Tabela 2, considerando-se os dados do problema exemplo:

Linha \ Coluna	x	y	k	sinal	
	0	1	2	3	
0	1	2	-	-	→ função-objetivo
1	1	1	1	1	→ 1ª restrição
2	-5	2	-10	1	→ 2ª restrição
3	3	5	15	1	→ 3ª restrição
4	1	0	0	1	} condições de não – negatividade
5	0	1	0	1	

Tabela 2. A matriz PPL exibindo a maneira pela qual os dados referentes à função-objetivo e suas restrições são armazenados.

A tabela revela uma sugestão para a organização da memória do computador em relação aos dados de entrada necessários para a resolução dos PPLs. Note-se que a linha zero da matriz armazena os coeficientes das variáveis da função-objetivo, ao passo que as demais linhas contêm os coeficientes das variáveis das restrições, nas colunas *x* e *y*, e os termos independentes, na coluna *k*. Além disso, na coluna *sinal* temos um *flag* para indicar se a restrição é do tipo \geq , recebendo valor 1, ou do tipo \leq , recebendo valor 0. O algoritmo pode ser evidenciado na Figura 4.

O algoritmo assume que as condições de não-negatividade sempre serão impostas ao PPL, o que também fica evidenciado pelas linhas 4 e 5 na Tabela 2. O procedimento

resolva_sistema() implementa a resolução de sistemas de equações lineares apresentada anteriormente.

Os laços de repetição aninhados presentes no algoritmo determinam quais são as equações lineares que irão definir a coordenada do ponto de interseção, se houver. Isso porque no caso de duas equações lineares apresentarem coeficientes angulares iguais, como se sabe, não haverá solução para o sistema de equações lineares, ou seja, não há ponto de interseção, pois as retas envolvidas são paralelas entre si.

Os parâmetros $x1$, $y1$, $k1$ e $x2$, $y2$, $k2$ são os coeficientes das variáveis e os termos independentes das duas equações cujo sistema será resolvido, enquanto x e y armazenam, respectivamente, a abcissa e a ordenada do ponto de interseção definido em *resolva_sistema()*.

O procedimento *resolva_sistema()* pode ser implementado modularmente, de forma a fazer chamadas a funções para cálculo de determinante, matriz adjunta e matriz inversa, o que certamente irá contribuir para a legibilidade e manutenibilidade do código a ser desenvolvido.

Como se pode observar, o algoritmo proposto é de relativa facilidade para implementação, tornando-o adequado para cursos semestrais de programação linear ou pesquisa operacional.

```

Algoritmo PPL de 2 variáveis
  Declare:
    x, y, x1, y1, k1, x2, y2, k2: real;
    Zmax, Zmin, aux: real;
    PPL: matriz[n,4] de real;
    linha, coluna, lin, i, j: inteiro;
    extremo, maximizacao: booleano;
  maximizacao←maxOrmin();
  n←leiaLinhas();
  leiaPPL();
  Zmax←0.0; Zmin←-1.7976931348623157e+308; coluna←0; i←0;
  Para linha1← 1 até n-1, faça
    lin←linha1+1;
    Para linha2←lin até n, faça
      x1←PPL[linha1, coluna]; x2←PPL[linha2, coluna];
      y1←PPL[linha1, coluna+1]; y2←PPL[linha2, coluna+1];
      k1←PPL[linha1, coluna+2]; k2←PPL[linha2, coluna+2];
      resolva_sistema(x1, y1, k1, x2, y2, k2, x, y);
      extremo←verifique_ponto(x, y);
      aux←0;
      Se extremo então
        aux←PPL[0,0]*x + PPL[0,1]*y;
        Se maximizacao então
          Se Zmax<aux então
            troque(Zmax, aux);
            troque(i, x); troque(j, y);
          Fim se
        Senão
          Se aux<Zmin então
            troque(Zmin, aux);
            troque(i, x); troque(j, y);
          Fim se
        Fim se
      Fim se
    Fim para
  Fim para
  Se maximizacao então
    escreva Zmax, i, j;
  Senão
    Escreva Zmin, i, j;
  Fim se

```

Figura 4. Algoritmo para resolução de problemas de programação linear de duas variáveis.
Fonte: próprios autores.

O texto a seguir apresenta algumas reflexões sobre a maneira pela qual professores podem explorar a proposta de algoritmo determinístico, aqui apresentada, destacando-se algumas estratégias experimentadas pelo próprio autor para o processo de transposição didática.

4. TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA PARA O ALGORITMO DETERMINÍSTICO

Apesar de possível a apresentação do algoritmo determinístico, aqui proposto, de uma forma estritamente algébrica, o papel assumido pelos gráficos no processo ensino-aprendizagem é de fundamental importância.

Segundo Trevelin e Belhot (2006), para que professores possam ser bem-sucedidos em sua missão, é necessário tentar executar procedimentos em sala de aula que percorram todo o ciclo de aprendizagem. Para tanto, é necessário o emprego de diversas técnicas e múltiplos recursos instrucionais para que, dessa forma, professores não imponham seu próprio estilo de aprendizagem aos estilos de aprendizagem de seus alunos (TREVELIN; BELHOT, 2006).

Sendo assim, a apresentação dos gráficos concomitantemente ao processo de resolução algébrico, representado pelo algoritmo determinístico, permite uma ampla cobertura do ciclo de aprendizagem, favorecendo a efetividade no cumprimento da missão imposta ao professor.

Se, por um lado, o gráfico exibindo região viável, pontos extremos, vetor gradiente e curvas de nível, demonstra de maneira inequívoca qual o ponto ótimo, ou segmento de reta entre dois pontos ótimos, por outro lado o gráfico ilustrando apenas os pontos de interseção entre as retas envolvidas fornece informações valiosas para a compreensão de aspectos importantes para o aprendizado do algoritmo determinístico.

Ambos os gráficos aqui apresentados podem ser vistos como diferentes representações semióticas contribuindo para ilustrar o conhecimento noético representado pelos problemas de programação linear de duas variáveis.

5. CONCLUSÕES

O processo de conversão de representações semióticas pode incluir múltiplos e diferentes artefatos. Estes artefatos podem ser descritivos, gráficos, algébricos, ou quaisquer outros que, sob o olhar crítico do professor, possam contribuir para o processo de transposição didática.

O ensino de programação linear pode ser melhorado com a introdução de práticas de programação de computadores sobre os principais algoritmos abordados. Porém, esse processo deve ser cuidadoso e planejado. Nesse sentido, a busca constante por diferentes representações semióticas, através de diferentes artefatos, pode contribuir para o aprendizado de programação linear sem, no entanto, deslocar o foco do interesse principal.

A utilização de aplicativos gráficos, aliada à construção de programas de computador, proporciona um enriquecimento de todo ciclo de aprendizagem no estudo dos problemas de programação linear de duas variáveis.

REFERÊNCIAS

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**: du savoir savant au savoir enseigné. Paris: La Fenseé Sauvage, 1991.

COSTA, J. F. A.; RAUEN, F. J. *Conversão de representações semióticas em matemática: linguagem e ensino em questão*. XIX Seminário do CELLIP. Pesquisa em Língua e Cultura na América Latina. UNIOESTE – Cascavel, Paraná. 21 a 23 de outubro de 2009.

GEOGEBRA. **Geogebra – Aplicativos Matemáticos**. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>> . Acesso em 29 jun. 2021.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões**. São Paulo: Prentice Hall Brasil, 2009.

STEINBRUSH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

TREVELIN, A. T. C.; BELHOT, R. V. *A Relação Professor-Aluno estudada sob a Ótica dos Estilos de Aprendizagem*: Um Estudo de Caso. In: XXVI ENEGEP – Encontro Nacional de Engenharia de Produção, Fortaleza – CE, 2006.