INTERFACE TECNOLÓGICA
volume 10 - número 1 - 2013

ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE A CONVERSÃO DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS PARA ESTUDO DO MÉTODO SIMPLEX ANALÍTICO EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

SOME REFLECTIONS ABOUT CONVERSION OF SEMIOTIC REPRESENTATIONS FOR STUDY OF THE ANALYTICAL SIMPLEX METHOD ON LINEAR PROGRAMMING

Paulo Francisco Sprovieri[1]

RESUMO

Este artigo pretende apresentar algumas estratégias bem sucedidas de transposição didática, obtidas a partir da prática de ensino de programação linear, particularmente sobre o método simplex analítico. As reflexões apresentadas ao longo do texto foram desenvolvidas a partir da aplicação dessas estratégias em turmas das disciplinas de pesquisa operacional e de programação linear e aplicações de cursos superiores de tecnologia em produção industrial, agronegócio e análise e desenvolvimento de sistemas. Todas as turmas estudadas apresentam perfis de alunos semelhantes: 70 a 80% desses alunos são egressos do ensino básico, fundamental e médio, público. Todas as ideias aqui são apresentadas através da ilustração da resolução de um único exemplo de problema de programação linear de três variáveis podendo, porém, ser extrapoladas para quaisquer problemas semelhantes independente do número de variáveis que contenham.

PALAVRAS-CHAVE: Transposição didática. Método simplex analítico. Programação linear. Pesquisa operacional.

ABSTRACT

This article aims at presenting some successful strategies of didactic transposition, derived from the practice of teaching linear programming, particularly on the analytical simplex method. The reflections presented throughout the text were developed from the application of these strategies in classes in the subjects of Operations Research and Linear Programming and Applications of higher

[1] Professor Pleno I - Especialista em Computação pela USP/São Carlos e Mestre em Ecologia e Recursos Naturais pela UFSCar. - E-mail: paulo.sprovieri@fatectq.edu.br

education technology courses in industrial production, agribusiness and analysis and development of systems. All groups studied showed similar profiles of students: 70 to 80% of these students graduated from public elementary and secondary schools. All of the ideas are presented here by illustrating the resolution of a single example of linear programming problem of three variables which may, however, be extrapolated to any similar problems regardless of the number of variables they contain.

KEYWORDS: *Didactic transposition. Analytical simplex method. Linear programming. Operations research.*

INTRODUÇÃO

Todo professor experiente deve lembrar-se da dificuldade que tinha, ao iniciar a carreira, em tentar “se fazer entender”, isto é, de tentar descobrir formas e mecanismos para tornar a apresentação de conteúdos mais fácil, senão menos árdua para os alunos. Yves Chevallard, em 1991, formalizou esse processo da seguinte forma:

> Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O ‘trabalho’ que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (CHEVALLARD, 1991, p.39).

Fica claro, portanto, que o trabalho do professor será tanto mais eficaz quanto maior for a capacidade desse profissional em realizar um processo de transposição didática competente. A transposição didática pode revelar a capacidade do profissional em transformar o conhecimento científico formal, complexo, erudito em conhecimento de massa, assimilável, popular até. É tarefa extremamente delicada e coloca o professor em uma linha tênue em que, ora rompida, transforma o conteúdo exposto falho, impreciso, inverossímil.

A constante preocupação com o processo de transposição didática permitiu que o conhecimento dos objetos matemáticos, denominado conhecimento noético, originasse muitas e diferentes formas de representá-lo. Ao conjunto múltiplo de representações dá-se o nome de semiose (COSTA; RAUEN, 2009). Sendo assim, o conceito noético como a fração de um inteiro, como a metade de alguma coisa, pode ser distinguido das diferentes formas de se representá-lo como, por exemplo ‘50%’, ’meio’, ‘1/2’, entre outras.

A experiência prática no ensino das disciplinas Pesquisa Operacional e Programação Linear e Aplicações mostra que o perfil de alunos da Fatec Taquaritinga é em grande parte composto por jovens oriundos do ensino básico público, 70% ou mais, carregando consigo um grande número de deficiências de aprendizagem, insegurança na demonstração da própria capacidade cognitiva, além de maus hábitos para estudar ou até mesmo completo desconhecimento com relação a esta prática, tão fundamental para um processo ensino-aprendizagem bem sucedido.

Para proporcionar melhorias no cenário acima apontado, foram desenvolvidas formas de representações de conhecimento do Problema de Programação Linear, aqui considerado conhecimento noético, dando origem a conversões de representações semióticas, importantes para o processo de transposição didática.

O trabalho realizado com o conhecimento semiótico de programação linear aponta que apenas diferentes formas de representação do conhecimento noético não são suficientes para melhorar o desempenho dos alunos. Também são necessárias algumas mudanças de comportamento. Por parte do professor, a ênfase constante no processo sistemático de desenvolvimento das soluções dos problemas. Por parte do aluno, o desapego pela calculadora, ou seja, praticar álgebra através das diferentes formas de representações semióticas apresentadas pelo professor melhora seu desempenho ao fazer contas, muitas delas processadas mentalmente. Por exemplo, boa parte dos alunos ao ser confrontado com a expressão $0{,}5 + \frac{3}{2}$ poderia proceder da seguinte forma:

- Convertendo a representação '0,5': $\frac{5}{10} + \frac{3}{2}$;
- Calculando o mínimo múltiplo comum: $\frac{5+15}{10}$;
- Fazendo a soma: $\frac{20}{10}$;
- Por fim, fazendo a divisão: 2.

Por outro lado, um aluno bem orientado procederia ao mesmo cálculo de uma maneira muito mais simples, mais rápida, em processo exclusivamente mental, entendendo que '0,5' é uma forma de representação da metade de alguma coisa, e respondendo da seguinte forma: "tenho uma metade, somando três metades $\left(\frac{3}{2}\right)$, tenho quatro metades, ou seja, dois (inteiros)"!

No estudo de programação linear é extremamente importante a maturidade cognitiva que se pode abstrair do exemplo ilustrado acima, principalmente se considerado o grande volume de manipulações algébricas, quando da resolução de problemas de programação linear de múltiplas variáveis. O desafio é diminuir a quantidade de cálculos para diminuir a probabilidade de ocorrência de erros.

Este trabalho pretende demostrar como diferentes formas de representações semióticas podem auxiliar o processo de aprendizagem no estudo de problemas de programação linear de múltiplas variáveis através do método simplex analítico, também conhecido por método dos dicionários. Para tanto, será analisado um único exercício, utilizado como o primeiro exemplo do método simplex analítico, extraído do livro-texto adotado (LACHTERMACHER, 2009) e originalmente proposto por Vasek Chvátal (CHVÁTAL, 1983). A próxima seção ilustra o exercício acima mencionado, enquanto que as seções subsequentes discutem estratégias docentes para a resolução do exercício e conversões de representações semióticas que, acredita-se, proporcionem maiores facilidades de aprendizagem por parte dos alunos envolvidos.

EXEMPLO DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR DE MÚLTIPLAS VARIÁVEIS

O Quadro 1, abaixo, mostra o exemplo de um problema de programação linear, ou PPL, de três variáveis e o conjunto de dicionários que definem a solução do problema (Lachtermacher, 2009):

$$Max\ Z = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

Função-objetivo de um PPL de maximização, com 3 variáveis

$$sujeito\ a:$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3$$
$$-x_1 + 3x_3 \leq 2$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2$$

Restrições

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Condições de negatividade

Dicionário Inicial $x_4 = 3 - x_1 - 3x_2 - x_3$ $x_5 = 2 + x_1 - 3x_3$ $x_6 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3$ $x_7 = 2 - 2x_1 + 3x_2 + x_3$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$ $Z = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$ $S = (0,0,0,3,2,4,2)\ e\ Z = 0$	*Dicionário − 1ª iteração* $x_1 entra, x_7\ sai$ $x_4 = 2 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_7$ $x_5 = 3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_7$ $x_6 = 2 + 4x_2 - 3x_3 + x_7$ $x_1 = 1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_7$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$ $Z = 5 - \frac{5}{2}x_2 + \frac{11}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_7$ $S = (1,00,2,3,2,0)\ e\ Z = 5$
(continuação)	
Dicionário − 2ª iteração $x_3 entra, x_6\ sai$ $x_4 = 1 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_6$ $x_5 = \frac{4}{3} - \frac{29}{6}x_2 + \frac{5}{6}x_6 - \frac{4}{3}x_7$ $x_3 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_7$ $x_1 = \frac{4}{3} - \frac{5}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_6 - \frac{1}{3}x_7$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$ $Z = \frac{26}{3} + \frac{29}{6}x_2 - \frac{11}{6}x_6 - \frac{2}{3}x_7$ $S = \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, 0,0\right)\ e\ Z = \frac{26}{3}$	*Dicionário − 3ª iteração* $x_2 entra, x_5\ sai$ $x_4 = \frac{1}{29} + \frac{21}{29}x_5 - \frac{3}{29}x_6 + \frac{28}{29}x_7$ $x_2 = \frac{8}{29} + \frac{6}{29}x_5 + \frac{5}{29}x_6 - \frac{8}{29}x_7$ $x_3 = \frac{30}{29} - \frac{8}{29}x_5 - \frac{3}{29}x_6 - \frac{1}{29}x_7$ $x_1 = \frac{32}{29} + \frac{5}{29}x_5 - \frac{9}{29}x_6 - \frac{3}{29}x_7$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$ $Z = 10 - x_5 - x_6 - 2x_7$ $S = \left(\frac{32}{29}, \frac{8}{29}, \frac{30}{29}, \frac{1}{29}, 0,0,0\right)\ e\ Z_{máx} = 10$

Quadro 1. PPL exemplo, com o respectivo conjunto de dicionários correspondentes à solução (LACHTERMACHER, 2009).

Embora não seja o objetivo aqui, a atividade de construção dos dicionários será parcialmente apresentada na próxima seção com o intuito de esclarecer a estratégia docente sobre como apresentar o algoritmo de resolução analítica aos alunos, de modo a reforçar conceitos fundamentais para a solução do problema, exposta no Quadro 1.

RESOLUÇÃO ANALÍTICA ATRAVÉS DO MÉTODO DOS DICIONÁRIOS

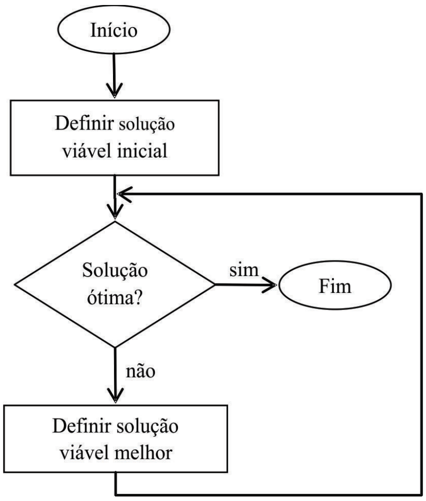


Figura 1. Fluxograma do Método dos Dicionários.
(Adaptado de Lachtermacher, 2009).

Conforme a Figura 1, a resolução de problemas de programação linear de múltiplas variáveis através do método dos dicionários, também conhecido por método simplex analítico, fica bem evidenciada através da ilustração. Porém, antes de qualquer coisa, é necessário definir, para os alunos, três conceitos fundamentais: (1) algoritmo, como uma sequência lógica de instruções ou tarefas, na tentativa de se resolver um problema; (2) fluxograma, a representação gráfica de um algoritmo; e, (3) iteração, que define um conjunto de tarefas executado repetidas vezes.

Importante enfatizar o fato de que algoritmos constituem um fluxo ordenado e sequencial de execução de instruções, podendo a sequência ser alterada de acordo com a necessidade que o problema exige, apresentando desvios condicionais e laços de repetição. Sendo assim, o algoritmo analítico do método dos dicionários apresenta dois blocos de instruções, sendo que o primeiro destina-se à construção do dicionário inicial e o segundo aos dicionários correspondentes à fase iterativa do algoritmo. Haverá tantos dicionários quanto o número de iterações necessárias até que a condição do laço de repetição seja satisfeita, isto é, que todos os coeficientes das variáveis da função-objetivo do dicionário na iteração corrente sejam negativos.

O primeiro bloco de instruções refere-se à geração do dicionário inicial. Aqui, mais uma vez, o docente deve intervir de modo a destacar as quatro tarefas fundamentais envolvidas:

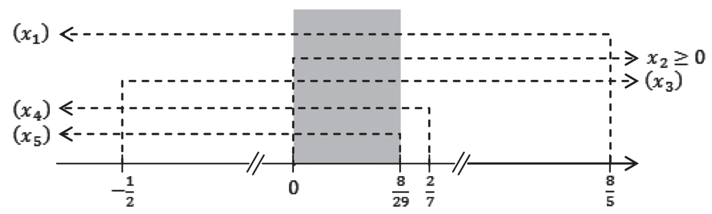
1. Definição das variáveis básicas, onde cada uma equivale à diferença entre os lados direito (RHS ou right hand-side) e esquerdo (LHS ou left hand-side) para cada uma das equações associadas às restrições do PPL na forma-padrão. Neste caso, as variáveis básicas são x_4, x_5, x_6, x_7;
2. Imposição de condições de não-negatividade para todas as variáveis envolvidas;
3. Tomada da função-objetivo do PPL como função-objetivo do dicionário inicial;
4. Definir a solução inicial, ou solução óbvia, considerando os valores das variáveis básicas iguais a zero e calculando, desse modo, o valor de Z.

Seguindo o fluxo do algoritmo, a próxima etapa verifica se a solução inicial é ótima. Como todas as variáveis da função-objetivo, denominadas variáveis não-básicas, possuem coeficientes positivos a solução inicial não é ótima, o que conduz o fluxo de execução do algoritmo à fase iterativa. Aqui, mais uma vez, se faz importante o papel docente ao destacar as etapas importantes que constituem o bloco iterativo, a saber:

1. Promover a troca de variáveis: entra para a base (variáveis do lado esquerdo) a variável não-básica, do lado direito da função-objetivo, que possuir o maior coeficiente positivo. Sairá da base a variável que exercer maior força restritiva sobre a variável não-básica escolhida para entrar. Considerando o dicionário da 2ª iteração, por exemplo, a variável básica a entrar é x_2 porque seu coeficiente, $\frac{29}{6}$, é o maior e único coeficiente positivo na função-objetivo do dicionário da 2ª iteração;
2. Para determinar a variável da base a sair, deve-se realizar a análise de forças restritivas, com o intuito de determinar qual das variáveis básicas, x_4, x_5, x_3 ou x_1 deverá ceder seu lugar à variável x_2, como ilustra o Quadro 2;
3. Nessa etapa, procede-se ao recálculo de equações para compor as novas equações correspondentes às variáveis da base e de Z para o dicionário da terceira iteração, conforme demonstrado no Quadro 3;
4. Finalmente, determina-se a solução de Z. Considerando-se a terceira iteração, o valor encontrado, Z = 10, corresponde ao valor máximo uma vez que na função-objetivo atual todos os coeficientes das variáveis apresentam coeficientes negativos e, portanto, não podem mais contribuir para o crescimento de Z.

Força restritiva que x_4 exerce sobre x_2: $x_4 = 1 - \frac{7}{2}x_2 \geq 0$ $-\frac{7}{2}x_2 \geq -1$ $7x_2 \leq 2$ $x_2 \leq \frac{2}{7}$	Força restritiva que x_5 exerce sobre x_2: $x_5 = \frac{4}{3} - \frac{29}{6}x_2 \geq 0$ $-\frac{29}{6}x_2 \geq -\frac{4}{3}$ $29x_2 \leq 8$ $x_2 \leq \frac{8}{29}$
Força restritiva que x_3 exerce sobre x_2: $x_3 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 \geq 0$ $\frac{4}{3}x_2 \geq -\frac{2}{3}$ $4x_2 \geq -2$ $x_2 \geq -\frac{1}{2}$	Força restritiva que x_1 exerce sobre x_2: $x_1 = \frac{4}{3} - \frac{5}{6}x_2 \geq 0$ $-\frac{5}{6}x_2 \geq -\frac{4}{3}$ $5x_2 \leq 8$ $x_2 \leq \frac{8}{5}$

Gráfico das forças restritivas que incidem sobre x_2 na 3ª iteração:



Quadro 2. Análise de forças restritivas da terceira iteração. A área cinza mostra a faixa de valores viáveis de x_2 na terceira iteração.

Fonte: próprio autor.

Uma vez que se tenha determinado qual variável não-básica a entrar, x_2, e qual variável básica a sair, x_5, no exemplo aqui fornecido, é necessário realizar o recálculo das equações do dicionário da 3ª iteração começando pela troca de variáveis. Isso se faz tomando-se a equação de x_5 do dicionário da 2ª iteração e determinando assim o valor de x_2, como evidenciado através do Quadro 3. Como na terceira iteração não poderá haver x_2 do lado direito das equações, faz-se necessário o recálculo de x_4, x_3, x_1 e Z para finalizar a composição da base do novo dicionário

<table>
<tr>
<td>Troca de x_5 por x_2:
$x_5 = \frac{4}{3} - \frac{29}{6}x_2 + \frac{5}{6}x_6 - \frac{4}{3}x_7$
$\frac{29}{6}x_2 = \frac{4}{3} - x_5 + \frac{5}{6}x_6 - \frac{4}{3}x_7$
$29x_2 = 8 - 6x_5 + 5x_6 - 8x_7$
$x_2 = \frac{8}{29} - \frac{6}{29}x_5 + \frac{5}{29}x_6 - \frac{8}{29}x_7$</td>
<td>Recálculo de x_4:
$x_4 = 1 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_6$
$x_4 = 1 - \frac{7}{2}\left(\frac{8}{29} - \frac{6}{29}x_5 + \frac{5}{29}x_6 - \frac{8}{29}x_7\right) + \frac{1}{2}x_6$
$x_4 = 1 - \frac{28}{29} + \frac{21}{29}x_5 - \frac{35}{58}x_6 + \frac{28}{29}x_7 + \frac{1}{2}x_6$
$x_4 = \frac{1}{29} + \frac{21}{29}x_5 - \frac{3}{29}x_6 + \frac{28}{29}x_7$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Recálculo de x_3:
$x_3 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_7$
$x_3 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\left(\frac{8}{29} - \frac{6}{29}x_5 + \frac{5}{29}x_6 - \frac{8}{29}x_7\right) - \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_7$
$x_3 = \frac{2}{3} + \frac{32}{87} - \frac{8}{29}x_5 + \frac{20}{87}x_6 - \frac{32}{87}x_7 - \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_7$
$x_3 = \frac{30}{29} - \frac{8}{29}x_5 - \frac{3}{29}x_6 - \frac{1}{29}x_7$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Recálculo de x_1:
$x_1 = \frac{4}{3} - \frac{5}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_6 - \frac{1}{3}x_7$
$x_1 = \frac{4}{3} - \frac{5}{6}\left(\frac{8}{29} - \frac{6}{29}x_5 + \frac{5}{29}x_6 - \frac{8}{29}x_7\right) - \frac{1}{6}x_6 - \frac{1}{3}x_7$
$x_1 = \frac{4}{3} - \frac{20}{87} + \frac{5}{29}x_5 - \frac{25}{174}x_6 + \frac{20}{87}x_7 - \frac{1}{6}x_6 - \frac{1}{3}x_7$
$x_1 = \frac{32}{29} + \frac{5}{29}x_5 - \frac{9}{29}x_6 - \frac{3}{29}x_7$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Recálculo de Z:
$Z = \frac{26}{3} + \frac{29}{6}x_2 - \frac{11}{6}x_6 - \frac{2}{3}x_7$
$Z = \frac{26}{3} + \frac{29}{6}\left(\frac{8}{29} - \frac{6}{29}x_5 + \frac{5}{29}x_6 - \frac{8}{29}x_7\right) - \frac{11}{6}x_6 - \frac{2}{3}x_7$
$Z = \frac{26}{3} + \frac{4}{3} - x_5 + \frac{5}{6}x_6 - \frac{4}{3}x_7 - \frac{11}{6}x_6 - \frac{2}{3}x_7$
$Z = 10 - x_5 - x_6 - 2x_7$</td>
</tr>
</table>

Quadro 3. Recálculo de equações para o dicionário da terceira iteração. Os realces na cor cinza exibem o valor de x_2 na atualização de cada uma das equações da nova base que inclui, no 3º ciclo, as variáveis x_4, x_2, x_3 e x_1.

Fonte: próprio autor.

Note-se que cada uma das 4 etapas do bloco de instruções, evidenciado no interior do laço de repetição do algoritmo apresentado, deverão ser executadas antes para a primeira iteração utilizando o dicionário inicial, depois para a segunda iteração a partir do dicionário da primeira iteração, para que somente então se possa realizar os processos ilustrados pelo Quadro 3 para a terceira iteração que utiliza o dicionário da segunda iteração. Portanto, para criar uma solução viável melhor utiliza-se sempre o dicionário mais atual, isto é, aquele da iteração imediatamente anterior.

Para ser possível analisar o quanto uma variável da base restringe o crescimento da variável selecionada para entrar para a base, durante o processo de análise de forças restritivas da iteração corrente, todas as variáveis não-básicas, à exceção daquela selecionada para entrar, deverão assumir valor nulo. Finalmente, para determinar o valor de Z no dicionário corrente todas as variáveis da função-objetivo desse dicionário também assumirão valores iguais a zero.

Na próxima seção, serão apresentados diversos exemplos de conversão de representações semióticas, a partir da terceira iteração do exemplo ilustrado no Quadro 3.

CONVERSÕES DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS AUXILIANDO O APRENDIZADO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

O suporte para toda discussão a seguir está fundamentado em um número que, a despeito da aparente falta de importância, assume papel chave para as conversões de representações semióticas propostas nesta seção. Este número é 29, primo, e que aparece pela primeira vez na equação da variável x_5 como o numerador do coeficiente de x_2, conforme se segue: $x_5 = \frac{4}{3} - \frac{29}{6}x_2 + \frac{5}{6}x_6 - \frac{4}{3}x_7$.

Para ilustrar a importância do número 29, as relações de multiplicidade devem ser observadas atentamente, como ilustra a Figura 2. Sendo assim, considere-se o número 29 e seus múltiplos representados pelos números correspondentes ao dobro, 58, ao triplo, 87 e ao sêxtuplo, 174. Esses números apresentam um total de 32 ocorrências ao longo de todo o processo de resolução, sem considerar aí as várias repetições, conforme fica evidenciado no Quadro 3, apresentado na seção anterior. Algumas conversões de representações semióticas podem aí ser observadas. Por exemplo, 87 é o triplo de 29 e 174 é o sêxtuplo de 29. Pode-se chegar diretamente ao valor 174, sem necessidade do uso de calculadora, da seguinte forma: o sêxtuplo é o dobro do triplo ou o triplo do dobro. Partindo de 29, seu triplo é 87, sendo o dobro deste igual a 174 que, por sua vez, é o sêxtuplo de 29.

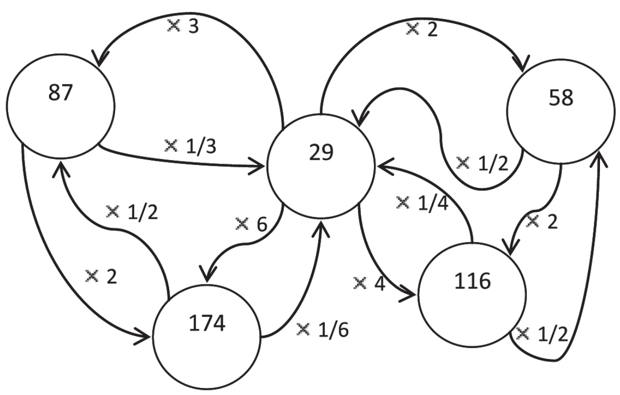


Figura 2. Grafo de multiplicidades, criado a partir do número 29.
Fonte: próprio autor.

A seguir, com o apoio do grafo elaborado, serão apresentadas algumas conversões de representações semióticas para as equações geradas a partir do processo de recálculo na terceira iteração. Importante salientar que o docente não apresentaria aos alunos um grafo semelhante ao da Figura 2, mas uma versão simplificada deste, como sugerido na Tabela 1 a seguir:

58	x 2
87	x 3
116	x 4
174	x 6

Tabela 1. Múltiplos de 29.

Considere o recálculo de x_1 abaixo:

$$x_1 = \frac{4}{3} - \frac{5}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_6 - \frac{1}{3}x_7$$

Substituindo-se x_2, tem-se:

$$x_1 = \frac{4}{3} - \frac{5}{6}\left(\frac{8}{29} - \frac{6}{29}x_5 + \frac{5}{29}x_6 - \frac{8}{29}x_7\right) - \frac{1}{6}x_6 - \frac{1}{3}x_7$$

Aplicando-se a propriedade distributiva para cada um dos termos isoladamente, tem-se que:

$$-\frac{5}{6} \times \frac{8}{29} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{29} = -\frac{20}{87}$$

$$-\frac{5}{6} \times -\frac{6}{29}x_5 = +\frac{5}{29}x_5$$

$$-\frac{5}{6} \times \frac{5}{29}x_6 = -\frac{25}{174}x_6$$

$$-\frac{5}{6} \times -\frac{8}{29}x_7 = -\frac{5}{3} \times -\frac{4}{29}x_7 = +\frac{20}{87}x_7$$

Portanto:

$$x_1 = \frac{4}{3} - \frac{20}{87} + \frac{5}{29}x_5 - \frac{25}{174}x_6 + \frac{20}{87}x_7 - \frac{1}{6}x_6 - \frac{1}{3}x_7$$

Observe que $\frac{4}{3}$ pode ser convertido para a representação semiótica $\frac{116}{87}$ e, desse modo, a soma $\frac{4}{3} - \frac{20}{87}$ pode ser tratada como $\frac{116}{87} - \frac{20}{87}$ que é igual a $\frac{96}{87}$. Simplificando, $\frac{32}{29}$. Os termos x_6 dependentes, por sua vez, formam a expressão $-\frac{25}{174}x_6 - \frac{1}{6}x_6$. Mais uma vez, pode ser usada aqui uma representação semiótica alternativa a $\frac{1}{6}$, mais exatamente $\frac{29}{174}$. Dessa forma, tem-se: $-\frac{25}{174}x_6 - \frac{29}{174}x_6 = -\frac{54}{174}x_6$ ou, simplificando-se por 6, $-\frac{9}{29}x_6$. Finalmente, considerando-se os termos x_7 dependentes tem-se $+\frac{20}{87}x_7 - \frac{1}{3}x_7$, onde $-\frac{1}{3}$ possui a representação semiótica $-\frac{29}{87}$. Sendo assim, tem-se: $+\frac{20}{87}x_7 - \frac{29}{87}x_7 = -\frac{9}{87}x_7$ ou $-\frac{3}{29}x_7$. Portanto, a equação para a variável básica x_1 no dicionário da terceira iteração é:

$$x_1 = \frac{32}{29} + \frac{5}{29}x_5 - \frac{9}{29}x_6 - \frac{3}{29}x_7$$

Como se pode notar, há inúmeras possibilidades de conversões de representações semióticas ao longo de toda a terceira iteração do processo de resolução do problema de programação linear apresentado. Dessa maneira, fica claro que o professor, atento às dificuldades de seus alunos em relação às manipulações algébricas, encontra aí espaço significativo para reduzir o volume de cálculo, contribuindo com a diminuição da probabilidade de ocorrência de erros dessa natureza. Isso acontece em virtude do fato de que os cálculos, disponíveis a partir das conversões de representações semióticas, são executados mentalmente, dispensando a necessidade do uso de calculadora em mais de 90% das situações analisadas.

REFLEXÕES FINAIS

As conversões de representações semióticas contribuem significativamente para o processo de aprendizagem de programação linear. A diminuição significativa na frequência de ocorrência de erros de cálculos proporciona ganho de confiança por parte dos alunos. Além disso, o amplo e adequado uso do espaço de conhecimento semiótico por parte do docente faz com que o processo de aprendizagem de programação linear ganhe celeridade.

Porém, a transposição didática através das conversões de representações semióticas por si só não é suficiente. Como observado, a apresentação clara, sistemática e precisa do algoritmo iterativo do método dos dicionários, ou método simplex analítico, deve ocorrer repetida e concomitante ao processo de resolução dos problemas de programação linear.

Mesmo com todas as dificuldades e desafios que o professor de programação linear ou pesquisa operacional enfrenta, com relação a alunos que carecem até mesmo dos conhecimentos mais básicos de álgebra elementar, a exemplo de cálculos com frações, a perfeita transição entre noético e semiótico, realizada pelo professor através da transposição didática, pode proporcionar rendimento acadêmico considerável por parte dos alunos envolvidos.

REFERÊNCIAS

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**: du savoir savant au savoir enseigné. Paris, La Fenseé Sauvage, 1991.

CHVÁTAL, V. **Linear Programming**. Nova York: W. H. Freeman and Company, 1983.

COSTA, J. F. A.; RAUEN, F. J. *Conversão de representações semióticas em matemática: linguagem e ensino em questão*. XIX Seminário do CELLIP. Pesquisa em Língua e Cultura na América Latina. UNIOESTE – Cascavel, Paraná. 21 a 23 de outubro de 2009.

LACHTERMACHER, Gerson. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões**. São Paulo, SP, Prentice Hall Brasil, 2009.